

## Ein Online-Trainingscenter zur Stärkung der Rechenfähigkeiten

Anja Bird<sup>1</sup>, Wigand Rathmann<sup>2</sup>

**Abstract:** Studierende der Ingenieurwissenschaften weisen in ihren ersten Semestern häufig Defizite in den grundlegenden Rechenfertigkeiten auf. In der Vorlesung bleibt jedoch meist keine Zeit, diese aufzugreifen und zu verringern. Im schlimmsten Fall bestehen Studierende eine Prüfung deshalb nicht, weil sie beispielsweise Terme nicht fehlerlos umformen können. Deshalb wurde an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU) erstmalig im Wintersemester 2018/19 ein Online-Trainingscenter eingerichtet, in dem durch randomisierte Tests mit STACK-Fragen „unendliche“ Übungsmöglichkeiten zum selbstständigen Training der Rechenfertigkeiten geschaffen wurden. Wichtig war deshalb auch, die Möglichkeiten der Randomisierung in den einzelnen STACK-Fragen auszunutzen. In diesem Beitrag wird v.a. vorgestellt, auf welcher Grundlage das Lernangebot konzipiert und letztendlich umgesetzt wurde.

**Keywords:** Studieneinstieg; formative Assessments; Online-Tests; mathematische Grundlagen

### 1 Ausgangslage

Die Wahrnehmung an der Technischen Fakultät der FAU – und wie vermutlich an anderen technischen Fakultäten auch – ist, dass der Erfolg in den mathematischen Grundvorlesungen zu einem nicht geringen Teil davon abhängt, ob basale Rechenfertigkeiten vorhanden sind. Dass sich mangelnde Vorkenntnisse in der Mathematik nachteilig auf das Studium in den mathematischen, natur- und ingenieurwissenschaftlichen Studienfächern auswirken, wurde z.B. von Heublein et al. herausgearbeitet ([He10], S.78). Diese Schwierigkeiten sind dabei nicht nur in Deutschland bekannt, im Vereinigten Königreich wird dies sogar eigens als "the Mathematics Problem" bezeichnet ([FHF14]).

Um einen eigenen vor allem belegbaren Eindruck der Situation als Dozent zu erhalten, wurde von Frau Görtler im Rahmen ihrer Zulassungsarbeit ([Gö14]) eine typische Klausuraufgabe eines ingenieurwissenschaftlichen Studiengangs aus dem ersten Semester einer Fehleranalyse unterzogen. Ausgewählt wurde die Teilaufgabe a) der Aufgabe in Abb. 1.

Bei der Analyse wurden zwei grundlegende Fehlerarten unterschieden (Zitat aus [Gö14], S.38f.):

<sup>1</sup> Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Technische und Naturwissenschaftliche Fakultät, Cauerstr. 11, 91058 Erlangen, Deutschland anja.bird@fau.de

<sup>2</sup> Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Angewandte Mathematik 2, Cauerstr. 11, 91058 Erlangen, Deutschland wigand.rathmann@fau.de

**Aufgabe 2**

Gegeben sei die Matrix  $A := \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ .

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $A$  und die zugehörigen Eigenräume.
- b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix  $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und eine Diagonalmatrix  $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , so dass

$$T^{-1}AT = D$$

gilt.

- c) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $A^{1031}$  sowie  $\det(7 \cdot A^{1031})$ .

Abb. 1: Für die Analyse ausgewählte Klausuraufgabe a)

- **Schulfehler** – mathematischer Fehler, der schon in der Schule häufig gemacht oder aus der Schulzeit mitgebracht und während des ersten Semesters nicht aufgearbeitet wurde. Er tritt in Berechnungsschritten auf, deren mathematischer Inhalt in der Schule gelernt wurde und Teil des Lehrplans des (bayerischen) Gymnasiums ist.
- **Unifehler** – Fehler, der, nach einer geeigneten Einteilung der Musterlösung in Berechnungsschritte, in einem Berechnungsschritt aus dem Stoffbereich der Mathematik an der Universität, kurz: Unimathematik, auftritt.

Frau Görtler hat zunächst den Lösungsweg in 17 Berechnungsschritte unterteilt, wobei „Eine Einteilung der Musterlösung in Berechnungsschritte [...] genau dann geeignet bzw. kleinschrittig genug [ist], wenn in den Berechnungsschritten, die dem Bereich der Unimathematik zugeordnet wurden, keine algebraischen Fehler mehr auftreten können.“ ([Gö14]). Jeder Berechnungsschritt kann somit eindeutig inhaltlich dem Schulstoff oder dem Unistoff zugeordnet werden, und so kann in einer ersten, sehr groben Analyse ein Fehler in einem Berechnungsschritt eindeutig der Kategorie Schul- oder Unifehler zugewiesen werden.

Die analysierten Berechnungsschritte und Fehler aller 306 ausgewerteten Klausuren verteilen sich folgendermaßen

	Schulmathematik / Schulfehler	Unimathematik / Unifehler	Gesamt
Anzahl der Berechnungsschritte	4	13	17
Anzahl der Fehler	93	160	253
Fehler je Berechnungsschritte	22,75	12,31	14,88

Aus der Fehlerverteilung auf die Berechnungsschritte kann geschlossen werden, dass Schulfehler im Vergleich zu Unifehlern fast doppelt so häufig auftreten. Es wurde nur das

untersucht, was von den Studierenden abgegeben wurde. Inwieweit Fehler im Rechenweg zu einer unvollständigen Bearbeitung geführt haben, wurde nicht betrachtet.

In ihrer Arbeit hat sie zusätzlich vier Fehlertypen unterschieden: **Methodenfehler, Verständnisfehler, Flüchtigkeitsfehler** und **algebraische Fehler**.

Die Auswertung hat gezeigt, dass 18% Verständnisfehler und je 26% Methoden- und algebraische Fehler bei den Schulfehlern aufgetreten sind, also auch 30% Flüchtigkeitsfehler waren. Insbesondere der Aspekt der algebraischen Unzulänglichkeiten entspricht auch unserer Wahrnehmung in den Übungen. Die Existenz und der Inhalt von Rechengesetzen ist zwar bekannt, die sichere und fehlerlose Anwendung benötigt jedoch viel Zeit. Mit dem Online-Trainingscenter Rechenfertigkeiten wollen wir bei den algebraischen Fehlern ansetzen. Die Studierenden erhalten die Möglichkeit, durch wiederholtes und variantenreiches Üben Sicherheit und Routine zu entwickeln und können somit auch Flüchtigkeitsfehler vermeiden.

## 2 Wege zur Unterstützung

An der FAU gibt es schon seit vielen Jahren Angebote für die Studieneingangsphase. Ausgehend vom Projekt „Qualität in Studium und Lehre an der FAU – QuiS“ [Qu] wurden verschiedene Aspekte der Studieneingangsphase an der Technischen Fakultät (TF) und der Naturwissenschaftlichen Fakultät (NF) überdacht. So gibt es nun an der NF eine Reihe von Orientierungswochen für verschiedene Studiengänge und digitale Brückenkurse. An der TF wurde das seit Jahren etablierte Mathematik-Repetitorium innerhalb des Projektes „MatInEE: Mathematik für Ingenieure: Erfolgreich Einsteigen“ (Rathmann/von Schroeders) inhaltlich neu konzipiert. Dabei wurden die Unterlagen als digitale Lernmodule auf der FAU-eigenen ILIAS-Plattform „StudOn“ erstellt und stehen bei Bedarf auch nach den Brücken- und Einführungskursen zur Verfügung. Für die vertiefende Erarbeitung des Schulstoffes wird auf die Lernmodule aus dem Projekt optes [Ma] zurückgegriffen.

Einstiegsangebote an beiden Fakultäten sind (Auswahl nicht vollständig):

- Präsenzangebote
  - (klassisches) Mathematik-Repetitorium an der Technischen Fakultät (TF)
  - offene Rechenübungsstunde (TF)
  - Sprechstunde Ingenieurmathematik (TF)
  - Sprechstunde für Studierende der Mathematik (NF)
  - Tutorium für Geowissenschaftler (NF)
  - Tutorium für Berufsqualifizierte (TF)
  - Orientierungswochen (NF)

- Online-Angebote
  - Lernmodule und Tests (Biologie, Chemie, Mathematik, Physik)

Die meisten Angebote werden aus der Uni heraus finanziert, ein Teil wurde und wird mit Hilfe von Fördermitteln aus dem „Qualitätspakt Lehre“ vom Bundesministerium für Wissenschaft und Forschung erstellt oder neu konzipiert.

Die Angebote werden angenommen und genutzt. Sie sollen den Studierenden nicht nur vor Aufnahme des Studiums helfen, sondern sollen sie gerade in der Anfangsphase bei Schwierigkeiten unterstützen. Probleme gibt es in der Bewerbung der Angebote, die elementare mathematische Fragen adressieren, so dass die Studierenden auf die Angebote im Bedarfsfall auch zurückgreifen. Im Kontakt mit den Studierenden zeigt sich aber, dass es auch an der Routine fehlt (siehe Abschnitt 1).

Die Möglichkeit des individuellen Übens, bei der auch eine individuelle Rückmeldung gegeben wird, fehlt jenseits der Brückenkurse an der FAU. Es gab bisher lediglich Online-Lernmodule, die den Schulstoff in unterschiedlicher Tiefe darstellen, jedoch keine formativen Tests. Hieraus entstand nun die Idee, ein Online-Trainingscenter Rechenfertigkeiten (OTC) zu entwickeln.

### **Was hätten die Studierenden gebraucht?**

Bleibt die Frage, wie ein Angebot für die Studierenden aussehen kann. Aus den Klausuren und den Übungen konnten wir die Notwendigkeit dieses Angebotes ableiten. Inhaltlich war die Herausforderung wichtige Themenfelder von nachrangigen abzugrenzen.

Dazu wurde nun eine Gruppe von Studierenden gebildet, die unter unserer Anleitung das OTC entwickelt hat. Das Team bestand aus vier Studierenden, die einen dreisemestrigen Kurs zur Ingenieurmathematik erfolgreich abgeschlossen hatten und die Herausforderungen aus eigener Erfahrung kannten. Dazu kam noch eine Studentin aus dem Lehramt Mathematik Gymnasium, die schon bei der Überarbeitung des Mathematik-Repetitoriums mitgearbeitet und selbst Übungen im ersten Semester in der Ingenieurmathematik als Tutorin gehalten hatte.

Die Studierenden haben verschiedene Themengebiete identifiziert, die in der Abb. 2 dargestellt sind.

Bei der weiteren Entwicklung des OTC wurde der Schwerpunkt auf Rechenregeln gelegt. Die Auswahl deckt sich mit der Analyse von Blömeke ([Bl16], S.7): „Termumformungen, das Lösen von Gleichungen sowie der Umgang mit Potenzen und Logarithmen scheinen besondere Schwierigkeiten zu bereiten.“

	Rechenregeln	Gleichungen	Funktionen
Brüche	X	X	X
binomische Formeln	X		
Faktorisieren	X		
Logarithmus, e-Funktion	X	X	X
Potenzen	X	X	X
Winkelfunktionen	X	X	X
Wurzeln	X	X	X
Betrag		X	
Lineare Gleichungen		X	
Ungleichungen		X	
Verkettung			X
Umkehrfunktion			X

Abb. 2: Themenmatrix

### 3 Erstellung des Online-Trainingscenters

Die Leitfrage bei der Erstellung war: „Was sollen die Aufgaben/Tests leisten?“ Die Ziele lassen sich so zusammenfassen:

- Verschiedene Blickwinkel der einzelnen Themen aufzeigen.
- Den Lernenden ein sofortiges und passgenaues Feedback geben.
- Ausbilden der Routine im Rechnen ohne Lernen der Ergebnisse.
- „Unendliche“ Übungsmöglichkeiten schaffen.
- Immer für eine Überraschung gut sein.

Bei der Realisierung sollten für jedes Thema entsprechend der Themenmatrix (S. 5) etwa zehn randomisierte Aufgaben gefunden oder erstellt werden. Die randomisierten Aufgaben ermöglichen die genannten „unendlichen“ Übungsmöglichkeiten, wie sie auch von Chris Sangwin in [Sa13], S. 38, erwähnt werden. Sangwin verweist auch darauf, dass ein sofortiges Feedback insbesondere für schwächere Lernende sinnvoll ist ([Sa13], S.34 und [Sh08]).

Um ausreichend Aufgaben in den Tests nutzen zu können, haben wir auf vorhandene Aufgaben zurückgegriffen, etwa von der FH Karlsruhe oder aus dem Projekt optes. Der Austausch von Aufgaben innerhalb der Special Interest Group Mathe+ILIAS war für uns sehr hilfreich. Bevorzugt haben wir Fragen ausgewählt, die bereits randomisiert waren.

Um eine möglichst individuelle Rückmeldung zu erstellen, haben wir im STACK-Fragentyp das Feedback in den Rückmeldebäumen genutzt und konnten in Kombination mit dem allgemeinen Feedback ausführliche Antworttexte erstellen. Das Prinzip der Überraschungen haben wir mit Hilfe der Randomisierung der Tests erreicht.

Da wir randomisierte Tests sowohl zu den Themengebieten (z.B. Gleichungen), als auch zu Schnittthemen (Rechenregeln für Brüche) erstellen wollten, wurden die einzelnen Fragen entsprechend kategorisiert. Dazu wurden drei Taxonomien eingeführt, die sich wie folgt gliedern:

- Taxonomie 1: Rechenregeln, Funktionen, Gleichungen
- Taxonomie 2: Brüche, binomische Formeln, Logarithmen/e-Funktion, etc.
- Taxonomie 3: Schwierigkeitsgrad 1,2,3

Die Taxonomien 1 und 2 entsprechen also den Spalten und Zeilen der Themenmatrix in Abb. 2 und wir können so die einzelnen Themen abbilden. Sind die Fragen einmal passenden Taxonomien zugeordnet, lassen sich leicht Tests mit Fragen aus einer oder mehreren Taxonomien erstellen. Am Ende des Projektes wurden Tests entsprechend dem folgenden Schema online gestellt:

### Rechenregeln

Tests nach Schwierigkeitsgrad  
(rand. Tests)

- RR Schwierigkeitsgrad 1
- RR Schwierigkeitsgrad 2
- RR Schwierigkeitsgrad 3

Thematische Tests (alle Fragen)

- RR Brüche
- RR binomische Formeln
- RR Faktorisieren
- RR Logarithmen
- RR Potenzen
- RR Winkelfunktionen
- RR Wurzeln

### Tests zu Gleichungen, Funktionen

So wie für das Themengebiet Rechenregeln (1. Spalte in der Themenmatrix (Abb. 2)) wurden auch zu den Themen in den Spalten Gleichungen und Funktionen Tests erstellt. Entsprechend den Markierungen in der Themenmatrix wurde ein Test zum Themengebiet Gleichungen erstellt, der sich über die Themen Brüche, Logarithmen / Exponentialfunktion, Potenzen, Winkelfunktionen, Wurzeln, Betrag, lineare Gleichungen und Ungleichungen erstreckt. In gleicher Weise wurden zum Themengebiet Funktionen ein Test erstellt, der die Themen Brüche, Logarithmen / Exponentialfunktion, Potenzen, Winkelfunktionen, Wurzeln, Verkettung von Funktionen und Umkehrfunktionen umfasst.

### **Thematische Tests**

Je Thema (Brüche, binomische Formeln etc.) wurde ein randomisierter Test über alle Gebiete entsprechend den Zeilen in der Themenmatrix mit allen bzw. max. zehn zufällig ausgewählten Aufgaben erstellt.

## **4 Ausblick und Dank**

Als nächstes steht nun ein intensives Testen der Fragen und Fragenpools an, damit diese Fragen dann wiederum weitergegeben werden können. Eine Verknüpfung mit Kompetenzmodellen, wie sie z.B. ILIAS bietet, ist bisher (noch) nicht angedacht.

Das Projekt wurde durch die Unterstützung vieler Seiten möglich. Zuerst sei hier die Möglichkeit genannt, auf vorhandene Arbeiten anderer zurückzugreifen, wie etwa

- aus dem Englischen übersetzte Aufgaben der FH Karlsruhe (Mikko Vasko, SIG Mathe+ILIAS),
- optes ([Ma])

Finanziert wurde das Projekt aus Mitteln von QuiS II (Qualität in Studium und Lehre, QPL) und den Departments Chemie- und Bioingenieurwesen, Elektrotechnik – Elektronik – Informationstechnik, Informatik sowie Werkstoffwissenschaften der TF.

Die Autoren bedanken sich auch bei Frau Stefanie Zepf vom Institut für Lerninnovationen für das Einstiegstraining zur Testerstellung der Arbeitsgruppe und Frau Katja Sesselmann für die Betreuung von Seiten QuiS II. Der Autor bedankt sich auch bei Herrn Nicolai von Schroeders für die Ideen in und zu diesem Projekt und die Betreuung der Arbeit von Frau Katharina Görtler.

Am Schluss möchten wir noch Rückmeldungen der Hilfskräfte nennen, die die Tätigkeit als sehr bereichernd empfunden haben, weil

- „Ich mir enorm viel neues Wissen aneignen konnte“,
- „Es weitaus ausgereift ist und man sich schnell einarbeiten kann“,
- „Das Erstellen der Fragen genau meinen Vorstellungen entsprach, nicht zu schwer war und dadurch dass manche Aufgaben bereits zum Teil programmiert waren nicht zu zeitaufwendig. Sonst hätte die Zeit wahrscheinlich nicht gereicht“,
- „Wir es geschafft haben einen Pool mit ca. 150 Fragen und ca. 20 Tests zu erstellen“.

Aus Sicht der beteiligten Hilfskräfte kann das Online-Trainingscenter die Studieneingangsphase unterstützen, weil es gerade neben dem Repetitorium die Möglichkeit bietet vorhandene Lücken zu schließen und Sicherheit in den mathematischen Grundlagen zu gewinnen. Die Studierenden sehen aber ebenfalls die Herausforderung, dass das OTC zwar die Möglichkeit zum intensiven Üben bietet, es aber auch genutzt werden muss und dies dennoch keine alleinige Erfolgsgarantie bietet. Es ist ein weiterer Beitrag für die Gestaltung der Studieneingangsphase.

## Literaturverzeichnis

- [Bl16] Blömeke, S.: Der Übergang von der Schule in die Hochschule: Empirische Erkenntnisse zu mathematikbezogenen Studiengängen. In (Hoppenbrock, A.; Biehler, R.; Hochmuth, R.; Rück, H.-G., Hrsg.): *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze*. Springer, Wiesbaden, S. 3–13, 2016.
- [FHF14] Faulkner, F.; Hannigan, A.; Fitzmaurice, O.: The role of prior mathematical experience in predicting mathematics performance in higher education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(5):648–667, 2014.
- [Gö14] Görtler, Katharina: , Didaktische Analyse der Ursachen von mathematischen Fehlern in Erstsemester-Klausuren der ingenieurwissenschaftlichen Bachelorstudiengänge. *Zulassungsarbeit Lst. Didaktik Mathematik*, 2014.
- [He10] Heublein, Ulrich; Hutzsch, Christopher; Schreiber, Jochen; Sommer, Dieter; Besuch, Georg: Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor- und in herkömmlichen Studiengängen. Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Exmatrikulierten des Studienjahres 2007/08. 2010.
- [Ma] Mathematik meistern mit optes – Für eine optimale Selbststudiumsphase: optes. Förderphase 2017-2020, <https://www.optes.de/>, aufgerufen am 11.12.2018.
- [Qu] Qualität in Studium und Lehre an der FAU – QuiS: QuiS II. Förderphase 2017-2020, <https://qu coast.fau.de/ueber-qu coast>, aufgerufen am 11.12.2018.
- [Sa13] Sangwin, Chris: *Computer Aided Assessment of Mathematics*. Oxford University Press, 2013.
- [Sh08] Shute, V. J.: Tensions, trends, tools, and technologies: Time for an educational sea change. In (Dwyer, Carol Anne, Hrsg.): *The Future of Assessment: Shaping Teaching and Learning*. Taylor and Francis Group, New York, S. 139–187, 2008.